

## Distribusi Probabilitas Empiris

Seperti telah diketahui, bahwa secara garis besar fungsi distribusi terbagi menjadi dua jenis, yaitu fungsi distribusi diskrit dan fungsi distribusi kontinyu. Sedangkan cara penghitungan peluang setiap distribusi tergantung pada fungsi padat peluang (*probability density function*) masing-masing distribusi. Sehingga dapat disebutkan bahwa fungsi padat peluang untuk kasus diskrit dan fungsi padat peluang untuk kasus kontinyu merupakan cara untuk menjelaskan distribusi probabilitas suatu populasi atau sistem. Penggunaan metode statistik (fungsi distribusi teoritis), tentunya tidak mungkin mencukupi untuk mencirikan probabilitas tertentu dari suatu sistem atau populasi pada proses pengamatan dan penelitian. Oleh karena himpunan data yang diperoleh dari pengamatan lebih baik dipakai untuk mencirikan atau meringkas berbagai karakteristik probabilitas yang dimiliki oleh sistem yang bersangkutan. Distribusi probabilitas yang terbentuk dari himpunan data pengamatan yang mencirikan karakteristik sistem ini dikenal dengan sebagai distribusi **probabilitas empiris** (pengamatan).

Sering dijumpai, dalam suatu penelitian yang menyangkut variabel random/acak, fungsi padat peluang distribusi tertentu  $f(x)$  tidak diketahui secara pasti, oleh karenanya bentuk suatu fungsi distribusi tersebut harus dimisalkan dan diduga. Agar pemilihan  $f(x)$  tidak terlalu menyimpang, maka penentuan suatu fungsi distribusi tertentu harus didasarkan pada pertimbangan yang menyeluruh akan suatu himpunan data pengamatan dengan pendekatan statistik yang benar. Untuk dapat membuat suatu distribusi probabilitas dari suatu himpunan data pengamatan diperlukan beberapa langkah :

### 1. Pengumpulan Data

Langkah pertama adalah pengumpulan data pengamatan yang kemudian dinyatakan sebagai himpunan data pengamatan yang akan diduga fungsi distribusinya. Data pengamatan harus diambil dengan cara yang benar dan memiliki jumlah kuantitatif yang cukup representatif. Banyaknya data pengamatan yang diperlukan dinyatakan dalam persamaan berikut :

$$N^1 = \left( \frac{k/s \sqrt{N \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}}{\sum X_i} \right)^2, N > N^1 \dots\dots\dots(2-1)$$

Dimana :

- $N^1$  = Jumlah pengamatan yang seharusnya dilakukan.
- $K$  = Tingkat kepercayaan dalam pengamatan. ( $k = 2, 1-\alpha=95\%$ )
- $S$  = Derajat ketelitian dalam pengamatan (5%)
- $N$  = Jumlah pengamatan yang sudah dilakukan.
- $X_i$  = Data pengamatan.

Data pengamatan dikatakan cukup apabila  $N > N^1$ .

2. **Penentuan Range/rentang**, didefinisikan sebagai data yang memiliki nilai terbesar dikurangi data yang memiliki nilai terkecil :

$$Range = X_{\max} - X_{\min} \dots\dots\dots(2-2)$$

### 3. Penentuan banyaknya kelas interval.

Menurut Prof.Dr. Sudjana [29] jumlah kelas yang paling sering digunakan adalah 5 sampai dengan 15 kelas interval, dan dipilih berdasarkan keperluan. Untuk menentukan jumlah kelas interval bagi himpunan data dengan  $n$  berukuran besar dapat menggunakan **aturan sturges**, yaitu :

$$Jumlah\_kelas\_interval = 1 + (3,3) \log'n \dots\dots\dots(2-3)$$

4. **Penentuan panjang kelas interval p**, ditentukan dengan aturan :

$$p = \frac{rentang / range}{banyaknya\_kelas} \dots\dots\dots(2-4)$$

Harga  $p$  diambil sesuai dengan ketelitian satuan data yang digunakan. Jika data berbentuk satuan, diambil harga  $p$  yang teliti sampai tingkat satuan. Untuk data hingga satu desimal,  $p$  diambil hingga satu desimal, begitu seterusnya.

- Sebelum daftar sebenarnya dituliskan, ada baiknya membuat kolom tabulasi untuk menentukan jumlah frekuensi masing-masing kelas interval, lalu dibuatlah daftar yang benar.
- Langkah terakhir adalah menerjemahkan tabel yang telah dibuat dalam bentuk histogram frekuensi atau probabilitas dari data yang ada.
- Untuk keperluan tertentu dapat juga digunakan tabulasi frekuensi atau distribusi kumulatif untuk menentukan daftar kumulatif kurang dari atau daftar kumulatif lebih dari.

### Uji Statistik

Uji statistik atau yang biasa disebut dengan uji hipotesis adalah sebuah proses untuk pengambilan kesimpulan tentang bagaimana harga parameter suatu populasi. Hipotesis adalah asumsi atau dugaan mengenai sesuatu hal yang dibuat untuk menjelaskan hal itu sering dituntut untuk melakukan pengecekan.

#### Goodness of Fit (Chi-square Test)

Test "Goodness of Fit" pada prinsipnya menggunakan uji Chi-kuadrat untuk menguji apakah suatu distribusi data hasil observasi memiliki kecocokan dengan suatu distribusi teoritis, seperti distribusi normal, poisson, eksponensial, dan sebagainya. Jadi, misalnya ada sebuah sampel yang terdiri dari kumpulan data, akan diuji apakah distribusi data tersebut sesuai dengan salah satu distribusi frekuensi yang ditentukan. Untuk menggunakan metode uji tersebut terlebih dahulu kita tentukan :

- $F_x(0)$ : Merupakan probabilitas kumulatif dari distribusi teoritis
- $F_x(N)$ : Merupakan probabilitas kumulatif dari distribusi frekuensi pengamatan.

Selanjutnya untuk memudahkan penghitungan dalam uji kecocokan dengan metode Chi-square maka  $F_x(0)$  dianggap sebagai probabilitas teoritis yang dilambangkan dengan  $E_i$  dan  $F_x(N)$  dianggap sebagai probabilitas observasi yang dilambangkan dengan  $O_i$ . Sehingga misalnya diketahui sebaran variabel random  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  yang normal mempunyai rata-rata  $(x)=E(x)=\mu$  dan keseragaman atau variansi  $(x) = \sigma^2$ . Variabel random normal demikian dapat diubah ke dalam bentuk standar dengan rumus:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \dots\dots\dots(3-1)$$

dengan rata-rata  $E(x)=0$  dan keseragaman  $(x)=\sigma^2=1$   
 misalnya terdapat statistik  $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \dots + \chi_n^2$  , maka statistik ini mempunyai sebaran Chi-square ( $X^2$ ) dengan fungsi kepadatan:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma^{n/2}} 2^{-n/2} x^{(n/2)-1} e^{-1/2x}; & x > 0 \\ 0 & ; x \text{ lainnya} \end{cases} \dots\dots\dots(3-2)$$

Dengan n jumlah variabel random independen yang dijumlahkan dan mempunyai derajat bebas sebesar n-1.

Sebagaimana telah dikemukakan diatas, bahwa uji kecocokan atau disebut uji kompatibilitas, memiliki tujuan adalah menguji apakah frekuensi yang diobservasikan (dihasilkan) memang konsisten dengan frekuensi teoritisnya (perencanaannya)? Apabila konsisten, maka tidak terdapat perbedaan nyata, dengan kata lain hipotesisnya dapat diterima. Sebaliknya apabila tidak ada konsistensi, maka hipotesisnya ditolak. Artinya hipotesis teoritisnya tidak didukung oleh hasil observasinya. Rumus yang digunakan adalah:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \dots\dots\dots(3-3)$$

- $O_i$  = frekuensi observasi (hasil produksi) dan
- $E_i$  = frekuensi teoritis atau perencanaan produksi dengan derajat bebas = k-1

$\chi^2$  merupakan ukuran perbedaan antara frekuensi observasi dengan frekuensi teoritis. Apabila tidak ada perbedaan antar frekuensi observasi dengan frekuensi teoritis, maka  $\chi^2$  akan semakin besar pula. Nilai  $\chi^2$  akan dievaluasi dengan sebaran Chi-square.berikut adalah langkah-langkah yang harus dilakukan:

- Menyatakan  $H_0$  dan hipotesis alternatifnya,
- Tentukan taraf nyata (tingkat signifikansi),
- Tentukan statistik uji  $\chi^2$  dan derajat bebasnya,
- Tentukan daerah penolakannya,
- Hitung  $\chi^2$  dan tentukan ditolak atau diterima  $H_0$ -nya
- Buatlah kesimpulan

Uji Chi-Square di susun dengan dasar untuk mengecek kecocokan yang ada pada distribusi probabilitas diskrit, namun dengan sedikit modifikasi uji ini dapat digunakan pada distribusi probabilitas kontinyu

Uji Kolomogorov-Smirnov

Telah dijelaskan bahwa jika suatu fungsi distribusi populasi tidak diketahui, maka harus ditaksir. Fungsi distribusi empiris menaksir fungsi sesungguhnya dari distribusi yang mendasarinya. Adalah Kolmogorov dan Smirnov yang mulai mengembangkan prosedur statistik ini dengan menggunakan jarak tegak maksimum antar kedua fungsi distribusi (salah satunya empiris, lainnya teoritis, atau kedua-duanya empiris) sebagai ukuran "jarak" antar kedua fungsi distribusi tersebut.

**a. Uji Kolomogorov-Smirnov satu sampel.**

Andaikan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  merupakan sampel acak berukuran n dari suatu populasi dengan distribusi  $F(x)$  yang tidak diketahui (diasumsikan kontinyu). Dan misalkan  $F_0(x)$  merupakan suatu fungsi distribusi yang sepenuhnya tertentu (teoritis). Tujuan kita adalah menguji  $H_0: F(X) = F_0(X)$  untuk semua  $X_i$  lawan  $H_1: F(X) \neq F_0(X)$ .

Kolmogorov-Smirnov menyarankan agar dihitung terlebih dahulu menghitung distribusi empiris  $F_n(X)$  untuk setiap nilai  $X_1, X_2, \dots, X_n$  dan kemudian memandang statistik

$$D_n = \text{Supreme} |F_n(x) - F_0(x)| \text{ sebagai ukuran kesesuaian antar distribusi empiris teoritis. } D_n$$

merupakan jarak tegak maksimum antara fungsi empiris  $F_n(X)$  dan distribusi teoritis  $F_0(X)$  yang dihipotesiskan, dan karena nilainya, terdapat pada suatu tempat yang tepat sebelum titik loncat  $F_n(X)$ .

Berdasarkan uji Kolmogorov-Smirnov maka  $H_0$  akan ditolak pada taraf  $\alpha$  bila  $D_n > d_{n, \alpha}$ , yang memenuhi  $P_{H_0}(D_n > d_{n, \alpha}) = \alpha$

Titik kritik asimot

Tabel 3.1. Tabel Daerah Kritis untuk Uji Kolmogorov-Smirnov satu sisi

$\alpha$	0.01	0.05	0.1
$d_{n, \alpha}$	$1.63 / \sqrt{n}$	$1.36 / \sqrt{n}$	$1.22 / \sqrt{n}$

Prosedur ini dapat digunakan untuk menguji  $H_0: (x)$  adalah  $N(\mu, \sigma^2)$  untuk  $\mu$  dan  $\sigma$  diketahui. Dalam praktek yang biasanya  $\mu$  dan  $\sigma$  tidak diketahui maka prosedur Kolmogorov-Smirnov telah disesuaikan oleh Lilliefors

**b. Uji Kolomogorov-Smirnov dua sampel.**

Andaikan  $X_1, X_2, \dots, X_m$  merupakan sampel acak berukuran m dari suatu populasi dengan distribusi  $F(x)$  yang tidak diketahui (diasumsikan kontinyu). Dan andaikan juga  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  sampel acak berukuran n dari suatu populasi dengan distribusi  $G(x)$  yang tidak diketahui. Tujuan kita adalah menguji apakah kedua populasi tersebut memiliki distribusi yang sama

$H_0: F(x) = G(x)$  untuk semua  $x_i$  lawan  $H_1: F(x) \neq G(x)$

Kolmogorov dan Smirnov menyarankan agar menghitung fungsi distribusi empiris  $F_m(x)$  dan  $G_n(x)$  menghitung  $D_{m,n} = \text{Supreme} |F_m(x) - G_n(x)|$ .

akan ditolak pada taraf  $D_{m,n} > d_{m,n, \alpha}$  yang memenuhi titik kritis asimot:

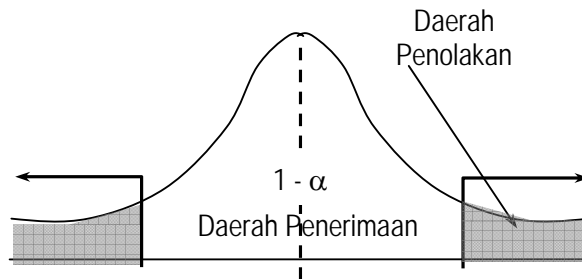
Tabel 3.2. Nilai Daerah Kritis Uji Kolmogorov-Smirnov dua sisi

$\alpha$	0.01	0.05	0.1
$D_{m,n, \alpha}$	$1.63 \sqrt{\frac{m+n}{n, m}}$	$1.36 \sqrt{\frac{m+n}{n, m}}$	$1.22 \sqrt{\frac{m+n}{n, m}}$

Uji Hipotesis Parameter Distribusi

Apabila dengan mempertimbangkan bahwa sebuah hipotesis tertentu adalah benar dan ternyata kita peroleh bahwa hasil-hasil yang diamati dalam sebuah sampel random berbeda secara nyata dari hasil-hasil yang diharapkan dengan hipotesisnya atas dasar memakai teori sampling, maka kita akan menyatakan bahwa perbedaan yang diamati adalah perbedaan nyata dan kita cenderung menolak hipotesis itu. Walpole dan Myers [32] dalam bukunya mengatakan bahwa pada dasarnya uji hipotesis adalah prosedur-prosedur yang

memungkinkan kita untuk menentukan apakah menerima atau menolak hipotesis dan dapat juga untuk menentukan apakah sampel-sampel yang diamati berbeda secara nyata dari hasil-hasil yang diharapkan. Atas dasar nilai statistik sampel, keput yang diambil guna menentukan apakah  $H_0$  diterima atau ditolak. Apabila  $H_0$  diterima, maka sama artinya dengan  $H_1$  ditolak. Begitu juga sebaliknya. Dalam uji hipotesis dikenal dengan apa yang dinamakan tingkat/jenis kesalahan, yaitu kesalahan tipe I ( $\alpha$ ) dan kesalahan tipe II ( $\beta$ ).  $\alpha$  terjadi apabila kita menolak sebuah hipotesis, padahal seharusnya kita menerima hipotesis tersebut.  $\beta$  terjadi apabila kita menerima sebuah hipotesis, padahal seharusnya kita menolak hipotesis tersebut. Tingkat keyakinan (level of significance) didefinisikan sebagai peluang maksimum dimana kita bersedia menanggung kesalahan tipe I. Tingkat kepercayaan (level of confidence) didefinisikan sebagai peluang menerima  $H_0$  yang memang  $H_0$  benar. Untuk menjelaskan, dapat digunakan model diagram densitas kemungkinan dari distribusi normal :



Gambar 3.1. Diagram Penerimaan Uji Hipotesis dalam fungsi

### Prosedur dasar pengujian hipotesis

Prosedur dasar pengujian hipotesis dinyatakan dalam beberapa langkah, :

1. Pengambilan keputusan dalam prosedur pengujian hipotesis yang menggunakan jumlah sampel besar dengan menggunakan statistik uji Z (diambil dari normal standar).

$$Z = \frac{\text{statistik\_sampel} - \text{parameter\_hipotesis}}{\text{deviasis tan darsampel}} \dots\dots\dots(3-4)$$

2. Apabila sampel yang dipergunakan kecil (biasanya kurang dari 30), maka dasar keputusan dalam prosedur pengujian hipotesis akan dilakukan dengan statistik uji t (Distribusi t).

$$t = \frac{\text{statistik\_sampel} - \text{parameter\_hipotesis}}{\text{deviasis tan darsampel}} \dots\dots\dots(3-5)$$

3. Pada setiap pengujian hipotesis statistik, prosedur yang harus diikuti tergantung pada hipotesisnya sendiri dan distribusi populasinya.

Adapun urutan cara untuk melakukan uji hipotesis dapat dibagi dalam beberapa langkah, antara lain:

- 1) Menyatakan hipotesis nol serta hipotesis alternatifnya.
- 2) Pilih tingkat keyakinan tertentu dan tentukan besarnya sampel.
- 3) Pilih statistik uji yang sesuai sebagai dasar bagi prosedur pengujian dan hal ini bergantung pada asumsi tentang bentuk distribusi dan hipotesisnya.
- 4) Tentukan daerah kritisnya.
- 5) Kumpulkan data sampel dan hitung statistik sampelnya yang kemudian diubah ke dalam variabel normal standar Z.

### Menguji Rata-rata $\mu$

Misalnya kita mempunyai sebuah populasi berdistribusi normal dengan rata-rata  $\mu$  dan simpangan baku  $\sigma$ . Akan diuji mengenai parameter rata-rata  $\mu$ . Untuk menguji rata-rata akan digunakan prosedur "Z - test" dan "t - Test".

1. Uji 2 sisi

- a.  $\sigma$  diketahui

untuk pasangan hipotesis  $H_0 : \mu = \mu_0$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

Dengan  $\mu_0$  merupakan harga yang diketahui, maka digunakan statistik uji :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \dots\dots\dots(3-6)$$

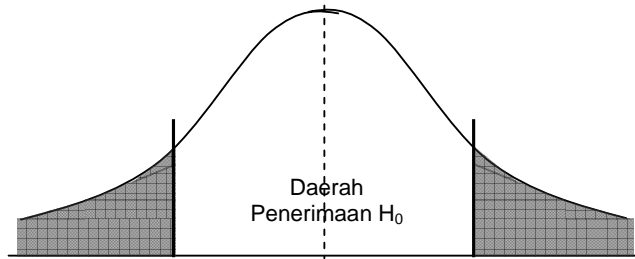
b.  $\sigma$  tidak diketahui

Jika simpangan baku  $\sigma$  tidak diketahui, maka diambil taksirannya, ialah simpangan baku  $s$  yang dihitung dari sampel.

Untuk pasangan hipotesis yang sama dengan diatas, maka statistik uji yang digunakan adalah :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \dots\dots\dots(3-7)$$

Untuk populasi yang  $\sigma$  nya tidak diketahui, maka digunakan Statistik uji dengan pendekatan distribusi t.



Gambar 3.2. Daerah Penerimaan Uji dua Sisi

2. Uji 1 sisi

a.  $\sigma$  diketahui

Pasangan Hipotesisnya :  $H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$ , (uji kanan) atau

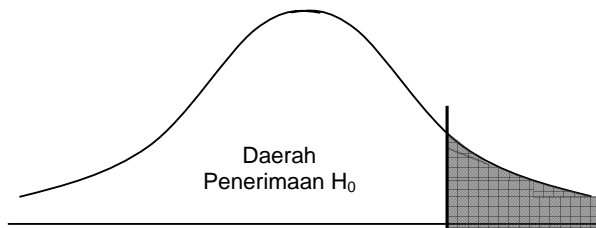
$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu < \mu_0$  (uji kiri)

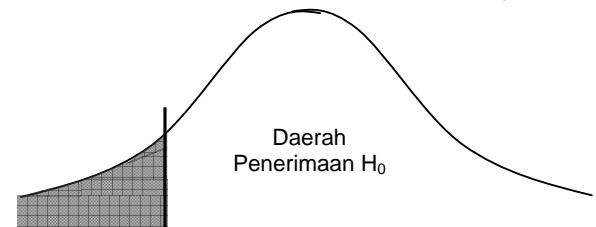
Maka digunakan statistik sama dengan uji 2 sisi.

b.  $\sigma$  tidak diketahui

Digunakan distribusi t seperti pada uji dua sisi.



Gambar 3.3. Daerah Penerimaan Uji satu



Gambar 3.4. Daerah Penerimaan Uji satu

Menguji Variansi.  $\sigma^2$

Parameter berikutnya yang akan diuji adalah variansi suatu populasi. Ketika menguji rata-rata  $\mu$  untuk populasi normal, didapat hal dimana simpangan baku  $\sigma$  diketahui. Harga ini umumnya didapat dari pengalaman, dan untuk menentukan besarnya perlu diadakan pengujian. Untuk itu kita misalkan populasi berdistribusi normal dengan variansi  $\sigma^2$  dan dari situ dapat diambil sampel acak berukuran n. Untuk menguji variansi, kita bedakan menjadi dua, yaitu :

1. Uji dua sisi

Untuk pasangan hipotesis  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$   
 $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Untuk pengujian ini dipakai statistik uji Chi Kuadrat :

$$X^2 = \frac{(n-1).s^2}{\sigma_0^2} \dots\dots\dots(3-8)$$

2. Uji satu sisi-

Pasangan hipotesisnya  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$   
 $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$  (uji sisi kanan), dan  
 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$   
 $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$  (uji sisi kiri).

Statistik ujinya sama dengan uji dua sisi.

Menguji kesamaan dua rata-rata : Uji dua sisi

Dalam hal ini kita akan membandingkan dua populasi yang independen dengan cara membandingkan parameter-parameter dari populasi tersebut. Misalnya kita memiliki dua populasi normal yang memiliki rata-rata  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  sedangkan simpangan bakunya  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$ . Secara independen daripadanya diambil sampel berukuran  $n_1$  dan  $n_2$ . Dari kedua sampel tersebut, berturut-turut didapat  $\bar{x}_1, S_1$  dan  $\bar{x}_2, S_2$ . Akan diuji rata-rata  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ . Maka pasangan hipotesisnya adalah :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$   
 $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Untuk  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , dan  $\sigma$  diketahui, maka statistik ujinya adalah :

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \dots\dots\dots(3-8)$$

$H_0$  akan diterima jika  $-Z_{1/2(1-\alpha)} < Z < Z_{1/2(1-\alpha)}$  dimana  $Z_{1/2(1-\alpha)}$  didapat dari daftar normal baku dengan peluang  $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ . Dalam hal lainnya  $H_0$  ditolak.

Sedangkan untuk populasi dengan  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , dimana  $\sigma$  nya tidak diketahui, akan menggunakan statistik Uji sebagai berikut ;

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \dots\dots\dots(3-9)$$

Jika  $n_1$  sama dengan  $n_2$  maka  $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s/\sqrt{n}} \dots\dots\dots(3-10)$

dengan :

$$s^2 = \frac{(n_1-1).s_1^2 + (n_2-1).s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \dots\dots\dots(3-11)$$

Menurut teori distribusi sampling, maka statistik t diatas berdistribusi student dengan derajat bebas =  $(n_1 + n_2 - 2)$ .. Kriteria pengujian adalah menerima  $H_0$  jika  $-t_{1/2(1-\alpha)} < t < t_{1/2(1-\alpha)}$  dimana  $t_{1/2(1-\alpha)}$  didapat dari daftar distribusi t dengan derajat bebas =  $(n_1 + n_2 - 2)$  dan peluang  $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ . Dalam hal lainnya  $H_0$  ditolak.

Jika ditemui kasus  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ . Artinya jika kedua simpangan baku keduanya tidak sama, akan tetapi kedua populasi tersebut berdistribusi normal, maka pendekatan statistik yang memuaskan adalah dengan statistik t sebagai berikut :

$$t' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right) + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)}} \dots\dots\dots(3-12)$$

kriteria pengujian adalah menerima  $H_0$  jika :

$$-\frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2} < t' < \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2} \dots\dots\dots(3-13)$$

dengan :

$$w_1 = s_1^2/n_1 \quad ; \quad w_2 = s_2^2/n_2$$

$$t_1 = t_{(1 - 0.5\alpha), (n_1 - 1)} \text{ dan}$$

$$t_2 = t_{(1 - 0.5\alpha), (n_2 - 1)}$$

$t_{\beta, m}$  didapat dari daftar distribusi student dengan peluang  $\beta$  dan derajat bebas – m. Untuk harga-harga t lainnya,  $H_0$  ditolak.

Menguji Kesamaan dua Rata-rata : Uji satu sisi

Sebagaimana uji dua sisi, untuk uji satu sisipun kedua populasi dimisalkan berdistribusi normal dengan rata-rata  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  dan simpangan baku  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$ . Karena umumnya besar  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$  tidak diketahui, maka disini akan ditinjau hal-hal tersebut untuk keadaan  $\sigma_1 = \sigma_2$  atau  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ . Pada uji satu sisi sebagaimana uji-uji satu sisi lainnya akan ditinjau uji sisi kanan dan uji sisi kiri.

1. Uji sisi Kanan :

Hipotesis ujinya adalah :  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$   
 $H_1 : \mu_1 > \mu_2$

Kriteria pengujiannya jika  $\sigma_1 = \sigma_2$  adalah menerima  $H_0$  jika  $t < t_{1 - \alpha}$ . Peluang untuk menggunakan daftar distribusi t ialah  $(1 - \alpha)$  sedangkan derajat bebasnya =  $(n_1 + n_2 - 2)$ .

Jika  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , maka kriteria pengujiannya adalah menolak  $H_0$  jika :  $t' \geq \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$  dan menerima  $H_0$  jika

terjadi sebaliknya dengan  $w_1 = s_1^2/n_1 ; w_2 = s_2^2/n_2, t_1 = t_{(1 - 0.5\alpha), (n_1 - 1)}$  dan  $t_2 = t_{(1 - 0.5\alpha), (n_2 - 1)}$ .

Peluang untuk menggunakan daftar distribusi t ialah  $(1 - \alpha)$  sedangkan derajat bebasnya masing-masing  $(n_1 - 1)$  dan  $(n_2 - 2)$ .

2. Uji sisi Kiri :

Perumusan hipotesis untuk uji kiri yaitu :  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$   
 $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

Jika  $\sigma_1 = \sigma_2$  maka kriteria pengujiannya adalah menolak  $H_0$  jika  $t \leq - t_{1 - \alpha}$ , dimana  $t_{1 - \alpha}$  didapat dari daftar distribusi t dengan derajat bebas =  $(n_1 + n_2 - 2)$  dan peluang  $(1 - \alpha)$ .

Jika  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , maka kriteria pengujiannya adalah menolak  $H_0$  jika :  $t' \leq \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$  dan menerima  $H_0$  jika

terjadi sebaliknya, dimana  $w_1, w_2, t_1,$  dan  $t_2$  semuanya seperti telah diuraikan sebelumnya. Jika didapati ternyata t' memiliki harga yang lebih besar dari harga tersebut, maka  $H_0$  diterima.

Menguji Kesamaan dua Variansi

Dalam menguji kesamaan dua rata-rata ditekankan bahwa kedua populasi diasumsikan memiliki variansi yang sama agar kegiatan menaksir dan menguji dapat berlangsung. Untuk hal dimana variansi yang berlainan, maka diperlukan beberapa pendekatan, yaitu langkah pengujian mengenai kesamaan dua variansi atau lebih. Populasi-populasi yang memiliki variansi yang sama dinamakan populasi dengan variansi homogen, dan populasi-populasi yang memiliki variansi yang berbeda dinamakan populasi dengan variansi heterogen.

Misalnya kita mempunyai dua populasi normal dengan variansi  $\sigma_1^2$  dan  $\sigma_2^2$ . Akan diuji dua pihak dalam kesamaannya, maka hipotesis ujinya adalah :

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Berdasarkan sampel acak yang independen maka diperoleh populasi satu dengan ukuran  $n_1$  dan variansi  $s_1^2$  sedangkan populasi dua dengan ukuran  $n_2$  dan variansi  $s_2^2$ , maka untuk menguji hipotesisnya digunakan statistik

uji :  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ . Kriteria pengujian adalah menerima  $H_0$  jika  $F_{1-0.5\alpha}(n_1-1, n_2-1) < F < F_{0.5\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ . Untuk taraf

nyata  $\alpha$ , dimana  $F_{\beta(m, n)}$  didapat dari daftar distribusi F dengan peluang  $\beta$ , dengan derajat bebas pembilang = m dan penyebut = n. Untuk nilai lainnya maka  $H_0$  ditolak.

Statistik uji yang lain yang digunakan untuk menguji hipotesis diatas juga adalah :

$$F = \frac{\text{VariansiTerbesar}}{\text{VariansiTerkecil}} \text{ dan } H_0 \text{ ditolak jika } F \geq F_{0.5\alpha}(v_1, v_2). \text{ Dengan } F_{0.5\alpha}(v_1, v_2)$$

didapat dari daftar distribusi F dengan peluang  $0.5\alpha$ , sedangkan derajat bebas  $v_1$  dan  $v_2$  sesuai dengan dengan rumus sebelumnya.

Jika pengujian yang dihadapi merupakan uji satu sisi, yaitu uji sisi kanan, maka hipotesis ujinya adalah :  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  dan  $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ , sedangkan untuk uji pihak kiri :  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  dan  $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ ,

Untuk uji sisi kanan, kriteria pengujian adalah menolak  $H_0$  jika  $F \geq F_{\alpha(n_1-1, n_2-1)}$  sedangkan untuk uji sisi kiri kriteria pengujiannya adalah menolak  $H_0$  jika  $F \leq F_{(1-\alpha)(n_1-1, n_2-1)}$ . Sedang untuk nilai-nilai selain itu maka  $H_0$  diterima.

### Menetapkan Ukuran Kesalahan

Sebagaimana diketahui ada 4 metode dalam analisis output yaitu Metode Replikasi, metode Pengelompokan Nilai Rata-rata "*Batch Mean Method*", metode pengelompokan rata-rata sekuensial "*Sequential Batch Mean Method*", dan metode keadaan regenerasi "*Regeneration state Method*". Untuk menentukan model analisis output yang terbaik, maka harus ditentukan diantara keempat model tersebut yang memiliki tingkat kesalahan terkecil. Adapun dua ukuran kesalahan yang biasa digunakan adalah "*Mean Square Error*" (MSD) dan "*Mean Absolut Error*" (MAD). MSD dan MAD di terjemahkan dalam persamaan :

$$MAD = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \hat{X}_i|}{n}, \text{ dan } \dots\dots\dots(3-14)$$

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_i)^2}{n}, \text{ Dimana : } \dots\dots\dots(3-15)$$

$X_i$  = Sampel /data Aktual Hasil Pengamatan

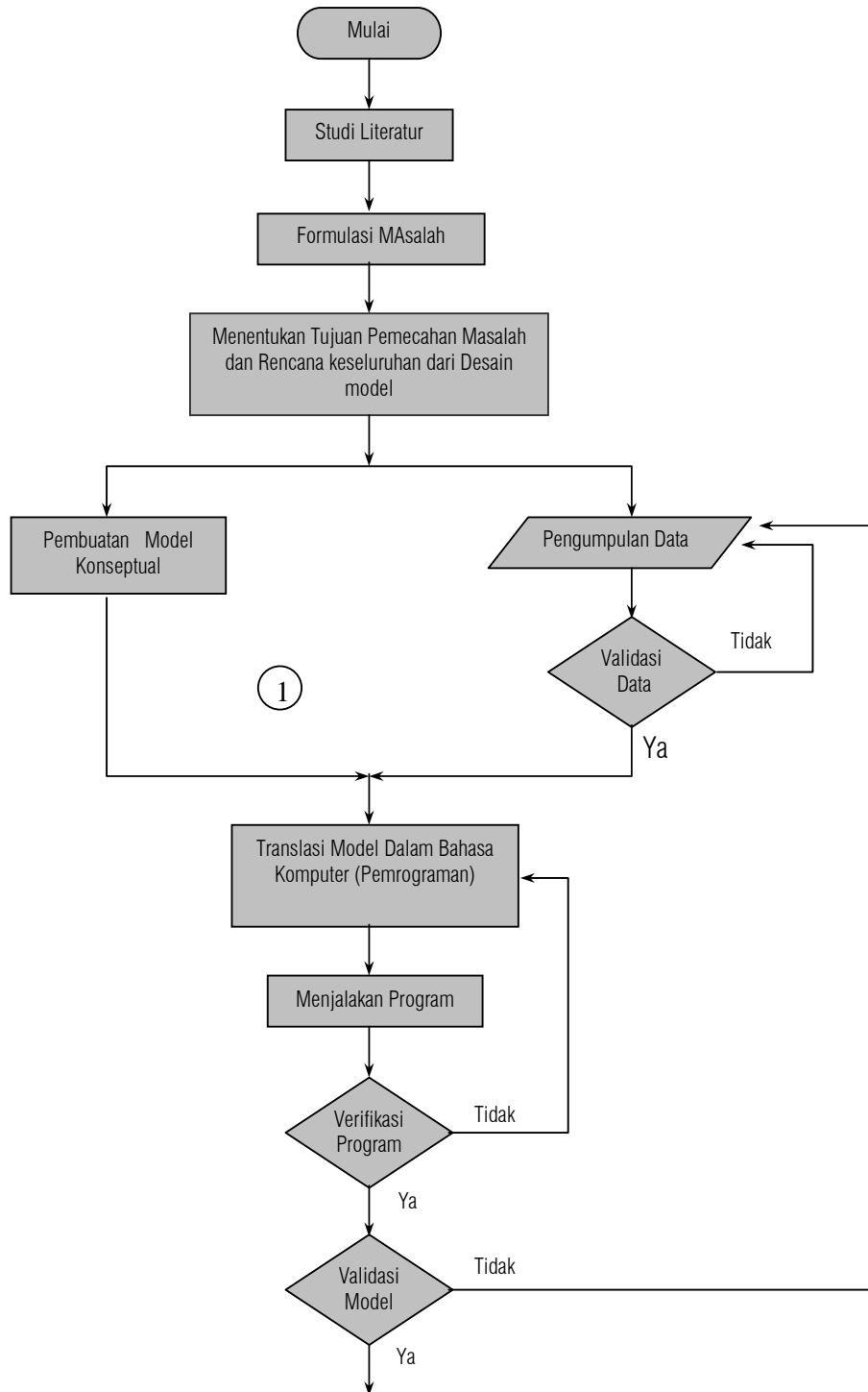
$\hat{X}_i$  = Sampel Hasil Simulasi dengan Metode Analisis Tertentu

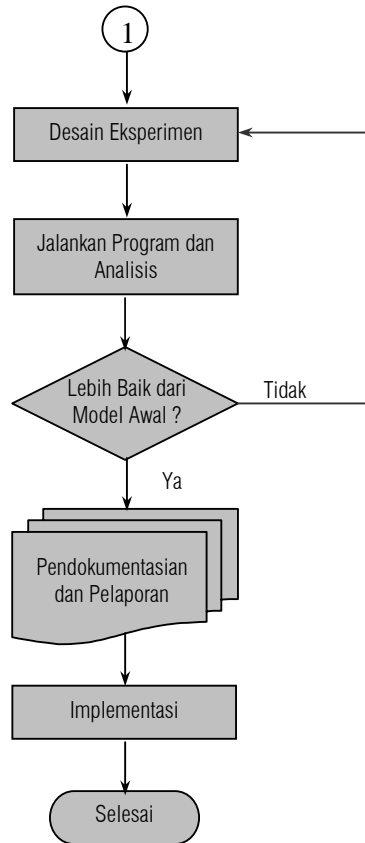
$n$  = Jumlah Pengamatan/Replikasi/Batch Pengamatan.

Setelah kita dapat menentukan metode analisis apa yang memiliki kesalahan terkecil, maka kita akan menggunakan metode tersebut guna menganalisis secara detail sistem riil yang diamati dan menganalisis usulan pengembangan model yang telah disusun.



# DIAGRAM ALIR PENYELESAIAN MASALAH SIMULASI





## ANALISIS OUTPUT/HASIL SIMULASI

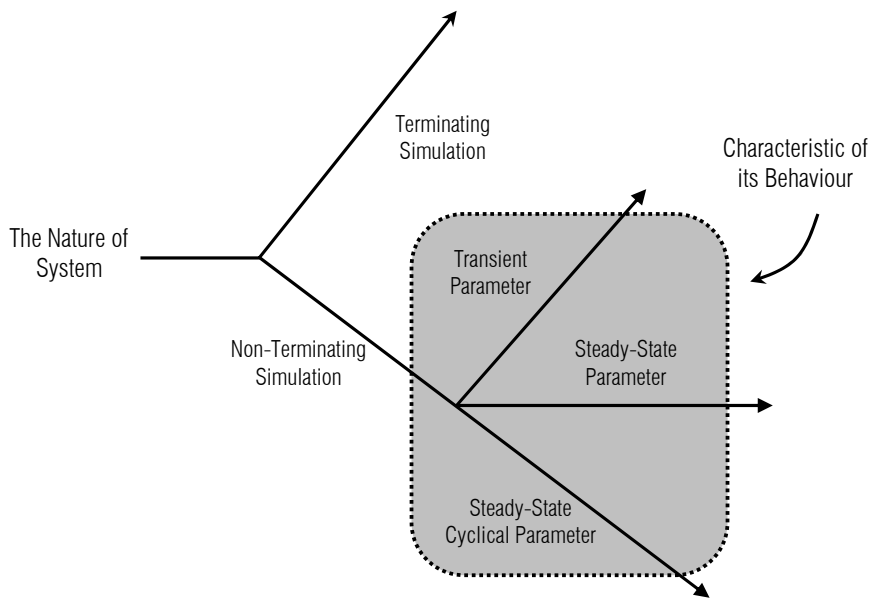
### Pendahuluan

Model simulasi Kejadian Diskrit (*Discrete – Event System Simulation*) memiliki karakteristik yang berbeda dari sebagian besar jenis model yang ada. Hal itu dikarenakan model simulasi kejadian diskrit terdiri dari banyak variabel random yang muncul bersamaan dalam suatu "state" yang membentuk karakteristik suatu mekanisme perubahan sistem yang diamati. Variabel random yang ada pada simulasi sistem kejadian diskrit tidak hanya pada probabilitas input yang ada, bahkan hasil/output simulasinya-pun merupakan variabel random, karena memiliki probabilitas dan tidak dapat diestimasikan sebagai sesuatu yang pasti (definitif).

Menggunakan output dari proses simulasi khususnya simulasi sistem kejadian diskrit sebagai panduan untuk mengetahui perubahan dan karakteristik sistem riil bisa jadi merupakan proses yang rumit. Hasil/output dari proses simulasi akan sangat mudah diinterpretasikan secara tidak cermat, dan menghasilkan konklusi yang tidak tepat pada sistem riil yang direpresentasikan oleh model tersebut.

### Tipe Simulasi sistem berdasarkan metode analisis Output

Sebuah pilihan pendekatan, untuk menentukan metode analisis yang tepat dari suatu model simulasi adalah dengan menilai tipe simulasi yang ada. Berkaitan dengan metode analisis, maka simulasi dibedakan menjadi dua jenis yaitu "*Terminating Simulation*" dan "*Non-Terminating Simulation*". Perbedaan antara kedua tipe tersebut adalah ketergantungannya pada kejelasan untuk menghentikan proses simulasi.

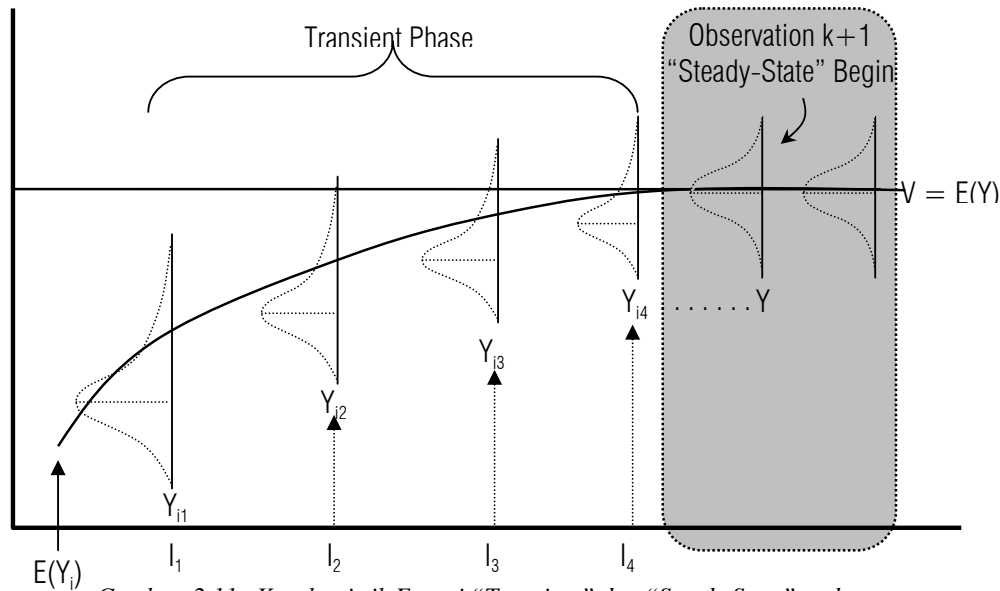


Gambar.2.10. Tipe Simulasi Sistem Berkenaan dengan Analisis Output/Hasil [17]

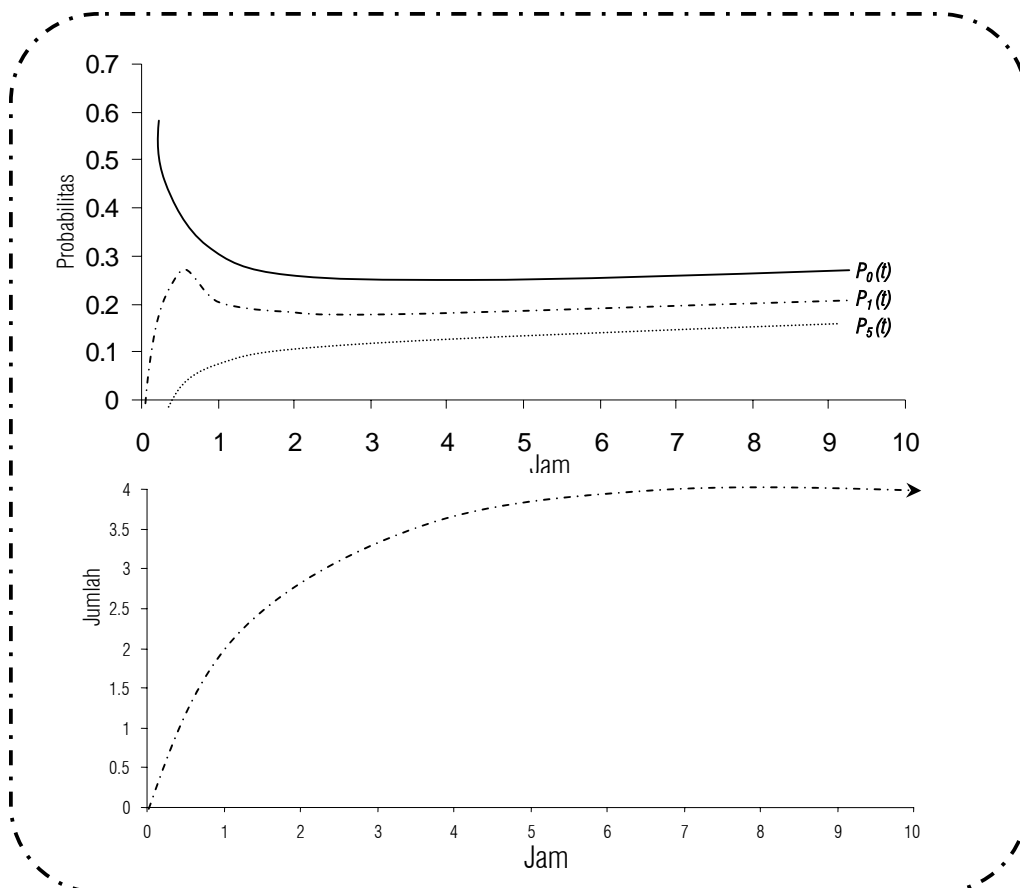
Simulasi yang merepresentasikan sebuah mekanisme kejadian yang memiliki *"initial condition"* dapat dikatakan sebagai sebuah simulasi yang bertipe *"terminating"*. Kondisi inisial dapat dipahami sebagai sebuah kondisi dimana keadaan sistem akan di *"Set-up"* seperti keadaan semula setiap akan melakukan simulasi. Sebagai contoh adalah sebuah sistem antrian pada suatu bank. Bank menjalankan kegiatan operasinya setiap hari dari pukul 8.00 pagi sampai dengan pukul 16.00 di sore hari. Pada saat setiap simulasi mulai dijalankan, yang merepresentasikan pukul 8.00 pagi, maka belum ada pengunjung yang berada dalam sistem antrian. Dan simulasi akan berakhir bila teller telah menyelesaikan pelayanan pada semua nasabah yang masih ada pada sistem antrian pada waktu pukul 4.00 sore. Dalam artian setelah pukul 16.00 tidak ada lagi nasabah yang datang, sehingga teller akan melayani nasabah yang tersisa di dalam antrian. Dengan demikian rentang waktu jalannya sistem adalah mulai jam 8.00 pagi sampai dengan terselesaikannya pelayanan nasabah terakhir yang pada waktu pukul 16.00 masih ada dalam antrian bank. Penghentian simulasi dilakukan pada saat pengunjung terakhir meninggalkan bank setelah dirinya dilayani oleh teller. Setiap kita melakukan replikasi/pengulangan simulasi, berarti kita akan merepresentasikan sistem sepanjang 8 jam kerja. Simulasi jenis ini termasuk simulasi sistem dengan karakteristik *"terminating"* karena setiap kita akan memulai menjalankan simulasi diperlukan sebuah *"initial condition"*, yang menggambarkan keadaan pada pukul 8.00 pagi hari. Singkatnya bahwa akhir simulasi bagi sistem *"terminating"* tergantung pada batasan sistem riilnya dalam arti kata kondisi akhir simulasi bukan merupakan kondisi awal untuk melakukan simulasi pada replikasi berikutnya. Untuk pengukuran output simulasi dari sistem diatas dapat digunakan parameter pengukur seperti estimasi waktu rata-rata nasabah yang menunggu, rata-rata jumlah nasabah berada dalam sistem, yang tentunya akan memiliki nilai yang berbeda setiap harinya.

Sistem diatas memiliki karakteristik yang berbeda dengan sistem produksi sebuah perusahaan manufaktur. Misalnya diketahui sebuah perusahaan manufaktur yang memiliki kegiatan produksi untuk membuat suatu produk yang dibagi-bagi kedalam beberapa stasiun kerja yang berurutan sampai selesainya produk tersebut. Produk akan diproses berdasarkan urutannya sampai selesai. Meskipun perusahaan tersebut menetapkan bahwa setiap hari hanya memiliki 10 jam kerja dan 5 hari kerja dalam seminggu, akan tetapi sistem diatas termasuk dalam sistem *"nonterminating"*. Hal itu dikarenakan bahwa setiap, kondisi akhir simulasi merupakan kondisi awal dari replikasi selanjutnya. Jadi misalnya pada sore hari dimana merupakan akhir jam kerja, sebuah produk X telah menyelesaikan proses di stasiun kerja 4 sebelum selanjutnya akan diproses pada stasiun kerja 5 sebagai proses akhir. Keesokan harinya, kondisi tersebut menjadi awal dari keadaan sistem, bahwa produk yang menjadi *"work in process"* akan diteruskan sampai akhir proses. Hal itu berbeda dengan sistem antrian pada kasus diatas. Pada kondisi *"nonterminating"* maka penghentian simulasi tidak didasarkan

pada jam kerja sebagaimana pada sistem antrian, akan tetapi karena sistem pada dasarnya berjalan sepanjang waktu hanya di potong oleh waktu istirahat tanpa ada inisialisasi baru, maka penghentian simulasi didasarkan pada kebutuhan seberapa panjang simulasi diperlukan agar dapat mengambil kesimpulan statistik yang cukup akan karakteristik sebuah sistem. Dapat dikatakan ada dua hal penting yang membedakan antara sistem "Terminating" dan "non-terminating", yaitu penetapan "initial condition" dan penghentian simulasi.



Gambar. 2.11. Karakteristik Fungsi "Transient" dan "Steady State" pada Simulasi sistem Probabilistik/Stokastik [17]



Gambar 2.12. Contoh Perilaku Sistem Antrian pada fase "STEADY-STATE" [11]

Selain dari karakteristik tersebut diatas, maka dua hal yang biasanya menjadi perhatian dalam mengamati sebuah sistem selain ciri *“terminating”* dan *“non-terminating”* adalah fase perubahannya yaitu fase *“Transient”* dan fase *“Steady-State”*.

Menurut Hoover [11], dalam menganalisis hasil simulasi perlu membedakan pengambilan data antara sistem yang masih berada dalam fase *“Transient”* dan fase *“Steady-State”*. Perbedaan antara *“Transient”* dan *“Steady-State”* dalam karakteristik sistem kadang sulit dipahami dan membingungkan dengan perbedaan simulasi *“Terminating”* dan *“non-Terminating”*. Akan tetapi pada kenyataannya sebagian besar sistem, *“terminating”* dan *“non-terminating”* memiliki kondisi dalam fase *“Steady-State”*.

**Sifat “Transient” dan “Steady-State” dari Simulasi Sistem Stokastik**

Dimisalkan  $s(t)$  merupakan keadaan atau *“state”* dari sebuah sistem pada waktu  $t$  dan  $P_s(t)$  merupakan probabilitas yang menunjukkan keadaan sistem pada waktu  $t$ , maka sistem akan mengalami fase *steady-state* untuk variabel  $s$  pada saat:

$$\frac{dP_s(t)}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots(2-5)$$

Jika kondisi tidak tercapai, maka sistem dikatakan berada dalam fase *transient*.

Dimisalkan sebuah contoh dari sebuah sistem antrian tunggal dengan proses kedatangan dan pola pelayanan yang berdistribusi eksponensial. Keadaan sistem sistem digambarkan dengan  $n(t)$  yang menunjukkan jumlah pelanggan dalam sistem pada waktu  $t$ . Gambar. 14 menunjukkan  $P_n(t)$  untuk  $n = 0, 1, \text{ dan } 5$  dan  $E[n(t)]$  saat tingkat kedatangan pelanggan 8,0 per jam dan tingkat pelayanan adalah 10,0 per jam. Meskipun secara teknis probabilitas distribusi fase steady-state  $P_n(\infty)$  merupakan batas yang asimtotik, tetapi dalam waktu yang singkat, sistem yang direpresentasikan oleh  $P_n(t)$  dan  $E[n(t)]$  memiliki karakteristik yang sangat mendekati sifat steady-state [11].

Keberadaan sebuah sistem pada fase *Steady-State* dapat dinilai secara salah, artinya walaupun probabilitas dari variabel sistem pada fase *Steady-State* cenderung konstan, namun hal tersebut bukan berarti sistem pada fase ini tidak berubah secara dinamis. Perubahan sistem dari waktu ke waktu pada fase *Steady-State* cenderung memiliki kadar aktivitas dan variansi yang sama dengan pada waktu sistem berada dalam fase *Transient*. Bahkan, pada kenyataannya, tidak jarang variansi yang terjadi pada fase *Steady-State* lebih besar dibanding pada fase *Transient*.

Perbedaan antara keadaan sistem pada fase *Transient* dan pada fase *Steady-State* bukan pada variansi hasilnya, tetapi pada distribusi probabilitas keadaan sistem (*Probability Distribution of the state*) yang pada fase *Steady-State* yang cenderung untuk konstant, tidak mengalami fluktuasi yang besar sebagaimana pada fase *Transient*.

Berikut ini adalah contoh sistem yang mencapai fase *Steady-State* :

1. Sebuah proses manufaktur yang menerima pesanan yang cenderung konstant pada tingkat tertentu. Pada awal simulasi bagian produksi bisa saja tidak memiliki tugas untuk dikerjakan, akan tetapi proses manufaktur akan terus berlangsung setelah pesanan mulai diproses secara diskrit dan terus-menerus. Sistem ini hanya membutuhkan satu kondisi inisial awal dan memiliki karakteristik *“non-terminating”*. Sistem ini akan mencapai fase *Steady-State* pada waktu tertentu.
2. Sebuah sistem persediaan darah PMI di suatu rumah sakit. Pusat PMI di sebuah rumah sakit akan berusaha mengumpulkan darah dan mendistribusikannya pada pasien yang membutuhkan. Dilain pihak permintaan akan darah sepanjang tahun cenderung untuk mengikuti distribusi uniform. Hal itu akan mengakibatkan distribusi probabilitas persediaan darah mencapai fase *Steady-State*. Sistem ini memiliki karakteristik *“non-terminating”*.
3. Sistem penarikan ongkos jalan tol didefinisikan bahwa akan diadakan penarikan biaya penggunaan jalan tol yang akan ditarik melalui pintu tol di masing-masing ujung jalan. Akan diambil sampel untuk waktu yang sangat sibuk, yaitu pada jam 06.00 sampai 08.00, saat karyawan berangkat kerja. Jika intensitas lalu lintas tidak berubah dalam tenggang waktu tersebut, dan tingkat kedatangan kendaraan tinggi, maka sistem tersebut hanya akan melewati fase *“transient”* sebentar saja sebelum mencapai fase *“Steady-State”*. Sistem ini memiliki karakteristik *“terminating”* dengan batas terminasinya adalah jam 08.00 pagi.

**Analisis Output Simulasi Sistem Berperilaku Terminasi / "Terminating Systems"**

Metode yang paling sering digunakan untuk mengestimasi karakteristik dari suatu sistem dengan pendekatan simulasi adalah mengambil sampel karakteristik sistem sebagai model simulasi. Setelah data-data tersebut diambil, maka dapat digunakan untuk membentuk estimasi titik atau interval dari karakteristik tersebut. Sebagai contoh, kita dapat mengestimasi waktu rata-rata pelanggan menunggu dalam lini antrian sebuah bank dengan cara mensimulasikan kedatangan pelanggan, proses antri, dan waktu pelayanan pelanggan selama beberapa hari guna mengambil suatu kesimpulan mengenai karakteristik sistem yang diamati.

Berikut adalah dua estimator titik yang paling sering digunakan yaitu  $\bar{x}$  untuk rata-rata dan  $s$  untuk deviasi standar dari sampel :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \text{ dan } s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}} \text{ untuk } (x_i, i=1,2,3,\dots,n). \dots\dots\dots(2-6)$$

Hal tersebut dapat lebih mudah dipahami jika nilai ekspektasinya dinyatakan sebagai :  
 $E(x_i) = \mu$  untuk semua  $i$  maka  $E(X) = \mu$ , dan  $E(s^2) = \sigma^2$  .....(2-7)

Untuk kasus simulasi seperti tersebut diatas, maka untuk setiap  $x_i$  tidak diperlukan observasi yang saling independen, tetapi yang penting memiliki nilai ekspektasi tertentu..

Dilain pihak, cara yang paling lazim digunakan dalam simulasi "terminating" untuk menjamin diperolehnya observasi  $x_i$  yang independen antara satu dengan lainnya dan memiliki suatu nilai ekspektasi tertentu adalah metode **Replikasi**. Setiap simulasi dieksekusi sejumlah kali dalam jangka waktu tertentu, dengan setiap replikasi independen terhadap replikasi yang lainnya.

Untuk simulasi yang direplikasi sebanyak R kali, dengan K jumlah observasi dalam setiap simulasi , maka  $x_{ij}$  = observasi ke-j pada replikasi ke-i, dimana  $i = 1,2,\dots,R$  dan  $j = 1,2,\dots,K$ . Dan  $Y_i$  = suatu ukuran performansi setiap replikasi ke-i, maka :

$$\bar{X}_j = \frac{\sum_{i=1}^R x_{ij}}{R}, j = 1,2,\dots,K, \dots\dots\dots(2-8)$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^R Y_i}{R}, \dots\dots\dots(2-9)$$

$$s^2_j = \frac{\sum_{i=1}^R (x_{ij} - \bar{X}_j)^2}{(R-1)}, \dots\dots\dots(2-10)$$

$$s^2_y = \frac{\sum_{i=1}^R (y_i - \bar{Y})^2}{(R-1)} \dots\dots\dots(2-11)$$

Dari persamaan-persamaan diatas, kita dapat memprakirakan interval konfidensi untuk  $E(x_{ij})$  dan  $E(y_i)$  dengan menggunakan persamaan :

$$P(\mu_j = \bar{X}_j \pm t_{\alpha/2,(R-1)} \frac{s_j}{\sqrt{R}}) = 1 - \alpha, \dots\dots\dots(2-12)$$

dan  $P(\mu_y = \bar{Y} \pm t_{\alpha/2,(R-1)} \frac{s_y}{\sqrt{R}}) = 1 - \alpha \dots\dots\dots(2-13)$

sehingga memiliki rentang interval konfidensi :

$$l = t_{\alpha/2,(R-1)} \frac{s}{\sqrt{R}} \dots\dots\dots(2-14)$$

Persamaan – persamaan tersebut mengindikasikan seberapa akurat kita mengestimasi ukuran performansi. Interval konfidensi merupakan prakiraan interval yang berdasarkan asumsi bahwa  $X_{ij}$  dan  $Y_i$  terdistribusi secara normal. Jika ini tidak dipenuhi, maka presisi atau ketepatan untuk interval konfidensi mungkin tidak pada  $(1-\alpha)$ . Dari teorema limit sentral (*Central Limit Theorem*) dikemukakan bahwa bagaimanapun juga jika jumlah replikasi yang semakin banyak maka nilai rata-rata dari sampel akan semakin terdistribusi secara normal [11].

Selain hal tersebut, secara filosofis untuk sistem yang *“terminating”* kita harus menentukan kondisi inisial pada saat awal simulasi dijalankan. Pada simulasi sistem *“terminating”*, maka tidak ada masalah pada fase transient atau steady-state yang telah dicapai, sehingga untuk estimasi performansi serta analisis perilaku sistem relatif dapat lebih mudah dilakukan dibanding dengan simulasi sistem *“nonterminating”*, yang harus dapat mendefinisikan fase yang dialalui oleh sistem yang diamati.

### Analisis Output Simulasi Sistem Yang Berperilaku Nonterminasi / “Nonterminating System”

Dalam menganalisis output hasil simulasi untuk sistem *“Nonterminating”*, ada beberapa masalah yang belum dijumpai pada analisis sistem *“Terminating”*, seperti :

a) **Keadaan Bias Kondisi Inisial.**

Karena simulasi sistem *“nonterminating”* akan melewati fase transient sebelum menjadi stabil pada fase Steady-state. Karena pada awal simulasi, sistem masih berada pada fase transient, maka terjadi fluktuasi pada probabilitas state/status sistem. Hal ini tentu mengakibatkan data yang dikumpulkan pada saat awal simulasi memiliki kondisi yang bias dengan kondisi inisial saat dimulainya simulasi. Perilaku sistem pada saat awal simulasi akan mengakibatkan adanya kesalah tafsiran atau *“misleading”* jika diamati tidak secara hati-hati. Hal ini merupakan akibat keadaan sistem yang masih fluktuatif sehingga tidak bisa dijadikan bahan amatan yang baik.

b) **Kovarians antara sampel.**

Kumpulan data yang diperoleh pada simulasi sistem *“nonterminating”* secara kolektif tidak independen antara satu dengan yang lainnya. Dan jika satu set sampel tidak independen maka estimasi variansi dari sampel tersebut akan bias.

c) **Lamanya eksekusi simulasi (“Run Length/Length of Replications”)**

Meskipun sistemnya sendiri memiliki sifat *“Nonterminating”* tetapi eksekusi simulasi tetap harus diakhiri. Jika kita mengakhiri sistem terlalu awal, maka kemungkinan data yang diperoleh dari hasil simulasi tidak bisa diamati secara tepat, karena kemungkinan sistem masih berada pada fase transient saat simulasi berakhir, dan ini mengakibatkan keadaan dan perilaku sistem belum stabil, yang dapat mengakibatkan tidak tepatnya pengamatan akan perilaku sistem yang didasari pada keadaan tersebut. Jadi perlu ditentukan panjang simulasi yang tepat agar mencukupi syarat untuk dilakukan pengamatan statistikal pada outputnya.

Untuk sistem yang berperilaku *“Nonterminating”*, hampir seluruhnya mengalami dua fase probabilitas keadaan/*“state”* dari sistemnya yaitu fase *“transient”* dan fase *“Steady state”*. Kita harus berusaha sedapat mungkin baru menghentikan simulasi pada saat sistem memasuki fase *“steady-State”*. Karena pada fase ini probabilitas state/status dari sistem yang diamati akan relatif stabil, sehingga memudahkan kita dalam mengamati bagaimana perilaku dan karakteristik sistem tersebut. Ada empat metode untuk menganalisis hasil simulasi bagi sistem yang berperilaku nonterminasi yang sering digunakan yaitu :

a) Metode Replikasi/Penghentian Simulasi.

b) Metode Pengelompokan Nilai Rata-Rata atau *“Batching Mean Method”*

c) Metode Pengelompokan Nilai Rata-Rata Sekuensial atau *“Sequential Batching Mean Method”*

d) Metode Keadaan Regenerasi / *“Regeneration State Method”*

#### Metode Replikasi/Penghentian Simulasi

Output simulasi sebuah sistem dengan karakteristik *“nonterminating”* dapat dianalisis menggunakan metode Replikasi. Metode ini juga biasa digunakan pada analisis output sistem *“terminating”*. Masalah utama yang timbul dalam metode ini adalah bagaimana kita menentukan jumlah replikasi yang cukup sehingga output simulasi cukup representatif untuk dianalisis guna mengetahui perilaku sistem yang diamati. Untuk simulasi sistem dengan perilaku *“nonterminating”* kita harus menghindari atau sedapat mungkin meminimasi efek dari kondisi inisial sistem, sehingga penghentian simulasi harus dilakukan pada jumlah replikasi tertentu dan panjang simulasi tertentu pada saat sistem memasuki fase steady-state. Cara yang paling umum untuk menghindari efek

dari kondisi inisial adalah dengan cara menghilangkan hasil simulasi pada saat-saat awal simulasi atau pada saat sistem berada pada fase transient dan hanya menggunakan data pada saat sistem telah mencapai fase steady-state. Walaupun tampaknya ini adalah metode yang mudah untuk dilaksanakan, namun dalam implementasinya, ada beberapa masalah yang timbul. Salah satunya adalah menentukan batas waktu simulasi untuk menentukan batas saat sistem meninggalkan fase transient dan memasuki fase steady-state untuk selanjutnya menghilangkan data-data yang berada pada fase transient. Hal ini hanya ditentukan dengan pertimbangan khusus dari si pemodel. Hal ini membuat awal simulasi atau pada saat sistem berada pada fase transient dan hanya menggunakan data pada saat sistem telah mencapai fase steady-state. Walaupun tampaknya ini adalah metode yang mudah untuk dilaksanakan, namun dalam implementasinya, ada beberapa masalah yang timbul. Salah satunya adalah menentukan batas waktu simulasi untuk menentukan batas saat sistem meninggalkan fase transient dan memasuki fase steady-state untuk selanjutnya menghilangkan data-data yang berada pada fase transient. Hal ini hanya ditentukan dengan pertimbangan khusus dari si pemodel. Hal ini membuat validitas model yang akan digunakan untuk analisis sangat tergantung pada kemampuan pemodel dalam mengestimasi saat tersebut.[11]

ada beberapa masalah yang timbul. Salah satunya adalah menentukan batas waktu simulasi untuk menentukan batas saat sistem meninggalkan fase *transient* dan memasuki fase *steady-state* untuk selanjutnya menghilangkan data-data yang berada pada fase *transient*. Hal ini hanya ditentukan dengan pertimbangan khusus dari si pemodel. Hal ini membuat validitas model yang akan digunakan untuk analisis sangat tergantung pada kemampuan pemodel dalam mengestimasi saat tersebut.[11]

Penentuan jumlah replikasi dinyatakan dalam notasi berikut :

$$P(E(W_q) = \bar{W}_q \pm t_{\alpha/2, (R-1)} \frac{s}{\sqrt{R}}) = 1 - \alpha, \dots\dots\dots(2-15)$$

Dimana :

$W_q$  = Suatu parameter sistem pada fase Steady-State.

$\bar{W}_q$  = Nilai Rata - Rata Parameter dari R kali Replikasi

s = Nilai Standar Deviasi dari sampel nilai Parameter dari R kali replikasi

1- $\alpha$  = Interval Konfidensi (95%)

$t_{\alpha/2, (R-1)}$  = Nilai fungsi dari distribusi student t dengan tingkat

*signifikansi  $\alpha$  dan derajat bebas R - 1. Kita gunakan pendekatan Distribusi Student t karena yang diambil adalah kumpulan sampel sehingga variansi populasi tidak diketahui. ( jika variansi populasi tidak diketahui digunakan pendekatan distribusi student t.[32] ).*

Setelah kita tentukan rentang kepercayaan tersebut maka dari sampel hasil simulasi atau dari masing – masing nilai  $W_q$  untuk setiap replikasi di plot kedalam suatu grafik dan harus berada dalam rentang kepercayaan tersebut, dan apabila ada nilai  $W_q$  yang berada diluar rentang kepercayaan tersebut, maka perlu ditambah sejumlah replikasi sampai seluruh nilai  $W_q$  berada dalam rentang kepercayaan yang sudah ditentukan.

#### Metode Pengelompokan Nilai Rata-rata / “Batching Mean Method”

Dua masalah yang merupakan kelemahan metode replikasi adalah biaya dan waktu yang dibutuhkan untuk komputasi pengulangan simulasi terutama pada sistem yang kompleks serta penentuan rentang waktu selama simulasi berada pada fase transient. Metode Pengelompokan nilai Rata-rata berusaha mengurangi hal tersebut, tetapi tidak menghilangkan kedua masalah tersebut. Dalam metode ini kita tidak melakukan simulasi dalam jumlah replikasi yang banyak, melainkan hanya perlu satu replikasi dengan rentang waktu simulasi yang panjang dan secara periodik me-“reset” ukuran statistik yang dihasilkan dengan cara mengelompokkan dalam suatu rentang waktu tertentu. Dalam proses me-“reset” ukuran-ukuran statistik yang dihasilkan biasanya didasarkan pada unit waktu tertentu atau jumlah kejadian definitif yang ada seperti jumlah antrian. Artinya sebagai contoh kita dapat menggunakan dasar waktu simulasi sebagai satuan pengelompokan ataupun jumlah kejadian sebagai dasar pengelompokan atau pembentukan “batch”. Dalam menentukan “batch” antara proses “reset” ukuran statistik, maka setiap interval “batch” tersebut harus memiliki interval waktu yang cukup dan dalam setiap pengambilan ukuran statistik dari masing-masing interval harus diusahakan sebagai proses yang independen dan sampel harus random. Oleh karena itu sebelum diadakan pengambilan ukuran statistik dari



masing – masing interval sampel, harus terlebih dahulu di yakinkan bahwa masing-masing sampel independen dan random. Alat uji yang digunakan adalah “*Runs Test*” dan Uji Tandal “*Sign Test*”.

Metode Pengelompokan Sekuensial/“*Sequential Batch Method*”

Jika kita menjalankan simulasi dengan *batch* yang sangat banyak, maka output dan proses analisis tidaklah efisien, namun sebaliknya jika batch yang digunakan terlalu kecil, maka akan sulit mengambil konklusi bahwa sampel bersifat independen dan random. Prosedur pengelompokan nilai rata-rata sekuensial pertama kali diterapkan dalam simulasi oleh Averill. M Law yang bertujuan menentukan jumlah batch terkecil yang perlu dilakukan guna mencukupi analisis statistikal, namun masih cukup banyak guna mengambil konklusi bahwa sampel independen dan random. Sebagai ukuran tingkat independen suatu kumpulan data sampel digunakan koefisien kelambatan korelasi / “*Lag Correlation Coefisien*” :

Metode Keadaan Regenerasi / “*Regenerative method*”

Jika analisis dari batch dilakukan bersamaan saat awal simulasi, maka proses simulasi sepanjang masa “*waem up*” atau saat sistem berada dalam fase transient akan menjadi percuma. Metode keadaan regererasi berusaha meminimasi efek dari hal tersebut. Metode ini tidak mendasarkan saat analisis pada perubahan keadaan sistem dari transient ke keadaan steady-state, namun metode ini membagi keadaan sistem dalam beberapa siklus regenerasi. Dalam metode ini kita akan menentukan titik regenerasi sebagai batas siklus gererensi dari sistem. Titik regenerasi/“*Regeneration point*” adalah suatu keadaan sistem dimana perilaku sistem setelah titik tersebut memiliki sifat yang independen terhadap perilaku sistem sebelum titik regenerasi. Berikut adalah contoh titik regerasi untuk beberapa sistem :

SISTEM	TITIK REGENERASI
Sistem antrian dengan kedatangan eksponensial	Saat tidak ada seorangpun pelanggan dalam antrian atau sistem
Sistem persediaan yang berdasarkan ROP dan ROQ tetap	Saat persediaan mencapai level maksimumnya.
Bank darah	Saat persediaan darah mencapai angka nol.
Sebuah lift pada sebuah bangunan kantor	Saat lift kembali ke lantai dasar dan tidak ada orang yang menunggu

Tidak mudah untuk menentukan titik regenerasi setiap sistem, dan tidak setiap sistem memiliki titik regenerasi. Metode ini digunakan untuk sistem yang dapat ditentukan titik regenerasinya

Setiap sistem yang memiliki titik regenerasi pasti memiliki siklus regenerasi. Sebagaimana keadaannya dengan titik regenerasi, dalam sebuah sistem yang memiliki beberapa siklus regenerasi, maka setiap siklus regenerasi independen terhadap siklus regenerasi yang lain. Untuk siklus ke-i akan diestimasi suatu keadaan sistem  $X_i$  dan perbandingan dua variabel random  $Y_i$  dan  $T_i$ . Dengan sebuah persamaan  $E(X) = E(Y)/E(T)$ . Adapun contoh masing masing variabel adalah :

Tabel 2.2. Contoh Variabel Regenerasi Sistem

SISTEM	X	Y	T
Sistem antrian	Rata-rata waktu tunggu pelanggan	Total waktu tunggu untuk semua pelanggan dalam satu siklus	Tidak ada pelanggan yang datang dalam siklus
Sistem Antrian	Rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian	Waktu dari sejumlah pelanggan dalam antrian	Panjang Siklus
Bank Darah	Rata-rata persediaan	Waktu sejumlah persediaan	Panjang siklus